APRIL/MAY 2023

BMA61/UMA61 — LINEAR ALGEBRA

Shanmuga Industries Arts & Science College * T.V.Malai

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define vector space.

   வரையறு: வெக்டார் வெளி.

2. What do you mean by Linear span?

   நேரியல் பெரும நீட்டம் ஸ்பேன் என்றால் என்ன?

3. If $\dim_F V = m$ then prove that $\dim_F$ Hom $(V,V) = m^2$.

   $\dim_F V = m$ எனில் $\dim_F$ $\text{Hom}(V,V) = m^2$ என நிரூபிக்க.

4. Prove that $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

   $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ என நிரூபி.

5. Define algebra over F.

   F-ன் மேல் அமைந்த இயற்கணிதத்தினை வரையறு.

19. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove that there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ யினுடைய அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F ல் உள்ளது எனில், V யில், T யினுடைய முக்கோண அணி உள்ளது என நிரூபி.

20. Prove that for $A, B \in F_n$,

(a) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

(b) $\det(ABA^{-1}) = \det B$

(c) If A is invertible then $\det A \neq 0$ and $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

$A, B \in F_n$, எனில்

(அ) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

(ஆ) $\det(ABA^{-1}) = \det B$

(இ) A க்கு நேர்மாறு உடையது மற்றும் $\det A \neq 0$ எனில் $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ என நிரூபி.

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai
*

12. (a) Prove that $A(A(W)) = W$.

$A(A(W)) = W$ என நிரூபி.

Or

(b) Show that $W^{\perp}$ is a subspace of V.

$W^{\perp}$ என்பது V யின் உள்வெளி என நிரூபி.

13. (a) If V is finite-dimensional over F, then prove that $T \in A(V)$ is regular if and only if T maps V into V.

V என்பது F ன் மேல் அமைந்த முடிவுறு பரிமாணம் எனில் $T \in A(V)$ ஒரு ஒழுங்கான உருமாற்றமாக இருப்பின் T ஆனது V யிலிருந்து V க்கு ஒன்றின் மேல் ஒன்று சார்பாகும் என நிரூபி.

Or

(b) If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ then prove that for any polynomial $q(x) \in F[x], q(\lambda)$ is a characteristic root of $q(T)$.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$ யினுடைய சிறப்பு மூலம் எனில் எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $q(x) \in F[x]$ க்கு, $q(\lambda)$ என்பது $q(T)$ யினுடைய சிறப்பு மூலம் என நிரூபி.

14. (a) If V is n-dimensional over F and if $T \in A(V)$ has the matrix $m_1(T)$ in the basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ and the matrix $m_2(T)$ in the basis $w_1, w_2, \ldots, w_n$ of over F, then prove that there is an element $C \in F_n$ such that $m_2(T) = C m_1(T) C^{-1}$.

F – ன் மேல் n பரிமாணமும், $T \in A(V)$ க்கு $v_1, v_2, \ldots, v_n$ என்ற அடிப்படை புள்ளிகளை உடைய $m_1(T)$ என்ற அணியையும், $w_1, w_2, \ldots, w_n$ என்ற அடிப்படை புள்ளிகளை உடைய $m_2(T)$ என்ற அணியினையும் உடையது எனில் $m_2(T) = Cm_1(T)C^{-1}$ என நிரூபி.

Or

(b) If $W \subset V$ is invariant under T, then prove that T induces a linear transformation $\overline{T}$ on V/W, defined by $(V+W)\overline{T} = VT + W$.

$W \subset V$ என்பது T யின் கீழ் மாற்றம் இல்லாதது எனில் T யானது $\overline{T}$ லிருந்து V/W ற்கு ஏற்படும் நேர்கோட்டு உருவ மாற்றத்தினை $(v+W)\overline{T} = vT + W$ என நிரூபி.

15. (a) For $A, B, \in F_n$ and $\lambda \in F$, prove that

(i) $tr(\lambda A) = \alpha \; tr \; A$

(ii) $tr(A+B) = tr \; A + tr \; B$

(iii) $tr \; (AB) = tr \; (BA)$

$A, B, \in F_n$ மற்றும் $\lambda \in F$ எனில்

(i) $tr(\lambda A) = \lambda \; tr \; A$

(ii) $tr(A+B) = tr \; A + tr \; B$

(iii) $tr \; (AB) = tr \; (BA)$ என நிரூபிக்க.

Or

(b) If two roots of A are equal then prove that det $A = 0$.

A என்ற அணியின் இரு தீர்வுகள் சமம் எனில் det $A = 0$. என நிரூபிக்க.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If V is finite-dimensional and if W is a subspace of V, then prove that W is finite-dimensional, dim $W \le \dim V$ and $\dim V/W = \dim V - \dim W$,

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமாகவும், WCV ஆகவும் இருந்தால் W என்பதும் முடிவுறு பரிமாணம் எனவும் dim $W \le$ dim V மற்றும் dim V/W = dim V − dim W என நிரூபி.

17. Let V be a finite-dimensional inner product space then prove that V has an arthonormal set as a basis.

V என்பது முடிவுறு பரிணாமம் உடைய உட்பெருக்கு வெளி எனில் V என்பது செங்குத்து கணம் என்று நிரூபி.

18. (a) If V is finite-dimensional over F, then prove that $T \in A(V)$ is singular if and only if there exists a $v \neq 0$ in V such that $vT = 0$.

(b) If V is finite-dimensional over F then for $S_1T \in A(v)$ prove that $r(ST) \le r(T)$ and $r(TS) \le (T)$.

V என்பது F ன் மேல் முடிவுறு பரிமாணம் உடையது எனில்

(அ) $T \in A(V)$ என்பது சிறப்பு உருமாற்றம் எனில் $v \neq 0$ என்பது V ல் உள்ளது மற்றும் $vT = 0$ என நிரூபி.

(ஆ) $S_1T \in A(V)$ எனில் $r(ST) \le r(T)$ and $r(TS) \le r(T)$ என நிரூபி.

6. Define characteristic root of T.

T யின் சிறப்பு மூலத்தினை வரையறு.

7. Define $m(T)$.

$m(T)$ யை வரையறு.

8. When will you say that two supspaces S, T are similar?

S, T என்ற இரண்டு வெளிகளும் வடிவொத்தவை என எப்போது கூறுவாய் என எழுதுக?

9. Define trace (A).

trace (A) - யை வரையறுக்க.

10. Find the determinant of $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ -ன் அணிக்கோவை மதிப்பு காண்க.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If V is the internal direct sum of $U_1, U_2, ..., U_n$ then prove that V is isomorphic to the external direct sum of $U_1, U_2, ..., U_n$.

$U_1, U_2, ..., U_n$ னுடைய உள்ளான நேர்த்தொகை V எனில் V என்பதை வெளியான நேர்த்தொகைக்கு சம சார்பாக இருக்கும் என நிரூபி.

Or

(b) Prove that $L(S)$ is a subspace of V.

$L(S)$ என்பது V யின் உள்வெளி என நிரூபி.